Probabilités

Mounir Bezzarga

Institut préparatoire aux études d'ingénieurs de Tunis
(VI)

Exercice (PDF par skype)

$(1) Exp''(x) = Exp(x) > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$, Exp est convexe sur $\mathbb{R}$.

Alors $\forall t \in [0,1]$

$$Exp(\underbrace{t}_{\lambda_1} x + \underbrace{(1-t)}_{\lambda_2} y) \leq tExp(x) + (1-t)Exp(y)$$

avec $\lambda_1 \in [0,1]$, $\lambda_2 \in [0,1]$ $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

$$\Rightarrow e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y} \leq \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^y$$

Autrement pour que $g : I \to \mathbb{R}$ soit convexe sur un intervalle non trivial I il faut il suffit que

$$\forall x_0 \in I \qquad \varphi_{x_0} : I \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R} \qquad \text{est croissante}$$

$$x \to \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Dans notre cas $\exists c_x \in (x_0, x)$
tq $\varphi_{x_0}(x) = g'(c_x)$
Où $g : x \to e^x$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$
Soit $x < y,\ x, y \in \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]x, y[$
il existe $d_y \in (x_0, y)$ tel que $\varphi_{x_0}(y) = g'(c_y)$

$$\varphi_{x_0}(x) = g'(c_x) < \varphi_{x_0}(y)$$

Donc

$$\varphi_{x_0}(x) = g'(c_x) < \varphi'_{d_y} = \varphi_{x_0}(y)$$

2/ i)

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x)^k}{k!}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(2n)! = \prod_{k=1}^{2n} k! = \prod_{k=1}^{n} (2k) \prod_{k=1}^{n-1} (2k+1) \geq \prod_{k=1}^{n} (2k) = 2^n n!.$$
$$\Rightarrow \frac{1}{(2n)!} \leq \frac{1}{2^n n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$
\begin{aligned}
ch(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} \\
\Rightarrow \quad ch(x) &= \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\frac{x^2}{2})^n}{n!} \\
\Rightarrow \quad ch(x) &= \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\frac{x^2}{2})^n}{n!} = e^{\frac{x^2}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

2i) Soit $x \in [-1,1],\ \lambda \in \mathbb{R}^+$
on pose $t = \frac{1+x}{2} \in [0,1] \Rightarrow\ x = 2t - 1$

$$e^{t\lambda+(1-t)(-\lambda)} \leq te^{\lambda} + (1-t)e^{-\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad e^{\lambda x} \leq \frac{1+x}{2}e^{\lambda} + \frac{1-x}{2}e^{-\lambda}$$

$$e^{\lambda x} \leq ch(\lambda) + xsh(\lambda).$$

d'où

$$e^{\lambda x} \leq e^{\frac{\lambda^2}{2}} + xsh(\lambda).$$

3i) X v.a centrée à valeur dans $[-1, 1]$
$E(X) = 0$ et $V(X) = 1 = \sigma^2$
Soit $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} E(e^{\lambda X}) &\leq E(e^{\frac{\lambda^2}{2}} + Xsh(\lambda)) \\ &\leq E(e^{\frac{\lambda^2}{2}}) + E(X)sh(\lambda) \\ \Rightarrow E(e^{\lambda X}) &\leq E(e^{\frac{\lambda^2}{2}}) = e^{\frac{\lambda^2}{2}} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Or X est centrée $\Rightarrow$ -X est centrée, d'où

$$E(e^{-\lambda X}) \leq e^{\frac{\lambda^2}{2}} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+$$

4i) $a \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0 \; P(X \geq a) = P(e^{\lambda X} \geq e^{\lambda a})$
car t associe $e^{\lambda t}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Inegalité de Markov :

$P(e^{\lambda X} \geq e^{\lambda a}) \leq \frac{E(e^{\lambda X})}{e^{\lambda a}}$

$\Rightarrow \ P(X \geq a) \leq e^{-\lambda a} E(e^{\lambda X}) \quad$ si $\lambda > 0$

5/ $n \in \mathbb{N}^*, \ a \in \mathbb{R}_+$ montrons qu'on a

$P(|\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i| \geq a) \leq 2e^{\frac{-a^2}{2}}$?

$\leftrightarrow$

$[\frac{1}{\sqrt{n}} |\sum_{i=1}^{n} X_i| \geq a] = [\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i \geq a] \bigcup [\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (-X_i) \geq a]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i \geq a) &= P(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq a\sqrt{n}) \\ &\leq e^{-\lambda a \sqrt{n}} . E(e^{\lambda (\sum_{i=1}^{n} X_i)}) \\ &\leq e^{-\lambda a \sqrt{n}} . E(\prod_{i=1}^{n} e^{\lambda X_i}) \end{aligned}$$

$$\leq \quad e^{-\lambda a\sqrt{n}}.\prod_{i=1}^{n} E(e^{\lambda X_i})$$

car$(X_i)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v. a. deux à deux indéper

$$(X_i \text{ v.a centrée }) \quad \leq \quad e^{-\lambda a\sqrt{n}}.\prod_{i=1}^{n} e^{\frac{\lambda^2}{2}}$$

$$\leq \quad e^{-\lambda a\sqrt{n}}.\prod_{i=1}^{n} e^{\frac{\lambda^2}{2}}$$

$$P(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq a) \quad \leq \quad e^{-\lambda a\sqrt{n}} e^{n\frac{\lambda^2}{2}}$$

$$\leq \quad e^{-\lambda a\sqrt{n}+n\frac{\lambda^2}{2}}$$

De même pour $(-X_i)$ qu'est une suite de v.a centrées deux à deux indépendantes

On trouve

$P(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(-X_i) \geq a) \leq e^{-\lambda a\sqrt{n}+n\frac{\lambda^2}{2}}$

Donc

$P(\frac{1}{\sqrt{n}}|\sum_{i=1}^{n} X_i| \geq a) \leq 2e^{-\lambda a\sqrt{n}+n\frac{\lambda^2}{2}} \quad \forall\lambda > 0$

On pose $f(\lambda) = 2e^{-\lambda a\sqrt{n}+n\frac{\lambda^2}{2}}$

$\Rightarrow f'(\lambda) = 2(-a\sqrt{n} + n\lambda)e^{-\lambda a\sqrt{n}+n\frac{\lambda^2}{2}}$

$f'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -a\sqrt{n} + n\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{a}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow$

$P(\frac{1}{\sqrt{n}}|\sum_{i=1}^{n} X_i| \geq a) \leq f(\frac{a}{\sqrt{n}})$

i.e

$P(\frac{1}{\sqrt{n}}|\sum_{i=1}^{n} X_i| \geq a) \leq 2e^{\frac{-a^2}{2}}$