Probabilités

Mounir Bezzarga

Institut préparatoire aux études d'ingénieurs de Tunis
(V)

Exercice 4:

X v.a à valeurs dans $\mathbb{N}$

$$P[X=n]=\begin{cases}\dfrac{a}{k!}, & n=k!,\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

1) Trouvez a tel que on a bien definie une loi de probabilité ? a ainsi choisi .
2)Que peut on dire de $E(X)$?
Solution
1) $a \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)=1 \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n!)=1 \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{n!}=1 \Rightarrow a=\frac{1}{e} \end{aligned}$$

2) $a = \frac{1}{e}$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X=n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n!P(X=n!) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n!\frac{a}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e} = +\infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow E(X)$ diverge car $\sum_{n=0}^{+\infty} nP(X=n)$ diverge .

Exercice 5:

X v.a qui suite une loi de Poisson $P(\lambda)$

Calculer $E(\frac{1}{1+X})$?

Solution

1) $X(\Omega) = \mathbb{N}$

$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
E(\frac{1}{1+X}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} P(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}(e^{-\lambda} - 1) \\
\Rightarrow E(\frac{1}{1+X}) &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}(e^{-\lambda} - 1)
\end{aligned}$$

Exercice 6:

Soit X_1 et X_2 deux v.a de Bernouilli non corrélées

Montrer que X_1 et X_2 sont independantes?

Solution

X_1 et X_2 non corrélées ie $\rho(X_1, X_2) = 0$

$\Rightarrow cov(X_1, X_2) = 0$

$\Rightarrow E(X_1, X_2) - E(X_1)E(X_2) = 0$

$\Rightarrow E(X_1, X_2) = E(X_1)E(X_2)$

$X_1\ X_2 \in \{0, 1\} \Rightarrow X_1\ X_2$ suit une loi de Bernouilli aussi

$E(X_1) = 0 \times P(X_1 = 0) + 1 \times P(X_1 = 1) = P(X_1 = 1)$

$P(X_1 X_2 = 1) = P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1)$

i.e. $\quad P(X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 1) = P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1)$

Donc les événements
$[X_1 = 1]$ et $[X_2 = 1]$ sont independants
$[X_1 = 0]$ et $[X_2 = 1]$ sont independants
$[X_1 = 0]$ et $[X_2 = 0]$ sont independants
$[X_1 = 1]$ et $[X_2 = 0]$ sont independants
N.B A et B sont independants $\Leftrightarrow$ A et $\overline{B}$ le sont aussi.
$[X_1 = i]$ et $[X_2 = j]$ sont independants $\forall i, j \in \{0, 1\}$

Exercice 6:

Soit X v.a $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \ \exists p \in]0,1[/ P(X = n) = pP(X \geq n) \forall n \in \mathbb{N}^*$

1/

$$\begin{aligned} pP(X \geq n) &= p[P(X = n) + P(X \geq n+1)] \\ &= pP(X = n) + pP(X \geq n+1) \\ &= pP(X = n) + P(X = n+1) \\ \Rightarrow P(X = n+1) &= (1-p)(P(X = n)) \\ &\Rightarrow (P(X = n+1))_n \text{de raison } 1-p \end{aligned}$$

$$P(X = n) = (1-p)^{n-1} P(X = 1)$$

$$P(X = n) = (1-p)^{n-1} p$$

Donc X suit une loi geométrique $g(p)$

2/

$$\begin{aligned} G_{X^2}(t) &= E(t^{X^2}) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)t^{k^2} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(1-p)^{k-1}t^{k^2} \end{aligned}$$

$u_k(t) = p(1-p)^{k-1}t^{k^2}$,

$|\frac{u_{k+1}(t)}{u_k(t)}| = (1-p)|t|^{2k+1} = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad 0 < |t| < 1, \\ +\infty & \text{si} \quad |t| > 1. \end{cases}$

$\sum u_k(t)$ C.A si $|t| < 1$ et div si $|t| > 1 \Rightarrow R = 1$ le rayon de convergence.

3/

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= G'_{X^2}(1) \\
G'_{X^2}(1) &= \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} k^2 t^{k^2-1} \\
E(X^2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} k^2 \\
&= p \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} k^2 \\
&= p\left(\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) q^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1}\right) \\
&= p\left(\frac{2q}{p^3} + \frac{1}{p^2}\right) \\
&= \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}
\end{aligned}
$$

Exercice 7:

1/ $\Omega = \{(X_1, ...X_n, ...)/X_n \in \{1,2,3,4,5\}\}$

2/ X v.a "rang de premier tirage avec le numéro trois"

a/ $P(X = k) = (\frac{4}{5})^{k-1} \times \frac{1}{5}, \quad k \in \mathbb{N}^*$

$X \hookrightarrow g(\frac{1}{5})$

b/ $E(X) = \frac{1}{p} = 5 \qquad E(X) = 5$

$V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{25}} = 4 \times 5$

$$V(X) = 20$$

C/ $G_X(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}$

$R = \frac{1}{1-p} = \frac{5}{4}$

$G_X(t) = \frac{\frac{1}{5}t}{1-\frac{4}{5}t} = \frac{t}{5-4t}$

$E(X) = G'_X(1) = (\frac{t}{5-4t})'(1)$
$(\frac{t}{5-4t})'(1) = \frac{(5-4t)-t(-4)}{(5-4t)^2} = \frac{5}{(5-4t)^2}$

$$E(X) = 5$$

$G''_x(t) = \frac{40}{(5-4t)^3}; \quad |t| < 5k$
Donc
$G''_x(t) = 40$
$V(X) = G''_x(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$
$= 40 + 5 - 25 = 20$
$V(X) = 20$