Probabilités

Mounir Bezzarga

Institut préparatoire aux études d'ingénieurs de Tunis
IV

Loi faible des grands nombres:

(P) Inegalité de Markov

Si X ne prend que des valeurs possitifs, Alors

$$\forall \epsilon > 0, P[|X| \geq \epsilon] \leq \frac{E(X)}{\epsilon}$$

$$\begin{aligned} P[|X| \geq \epsilon] &= P[\frac{|X|}{\epsilon} \geq 1] \\ &= \int_{\Omega} X_{[\frac{|X|}{\epsilon} \geq 1]} dP(\omega) \end{aligned}$$

soit $\omega \in \Omega / \frac{|X(\omega|)}{\epsilon} \geq 1$

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\Omega} \frac{|X(\omega)|}{\epsilon} dP(\omega) \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} |X(w)| dP(\omega) \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} E(X) \end{aligned}$$

(P) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\forall \epsilon > 0, P[|X - E(X)| \geq \epsilon] \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$$

$$\begin{aligned} P[|X - E(X)| \geq \epsilon] &= P[|X - E(X)|^2 \geq \epsilon^2] \\ &\leq \frac{E((X - E(X))^2)}{\epsilon^2} \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2} \end{aligned}$$

Loi faible des grands nombres:

Soit $(X_n)_{(n>0)}$ v.a 2 a 2 independantes et de même loi ayant un moment d'ordre 2, dont l'esperance est μ et la variance est $V = \sigma^2$.

$$M_n = \frac{X_1 + ... + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \qquad \text{leurs moyenne}$$

Alors $\quad \forall \epsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} P(|M_n - \mu| > \epsilon) = 0$

$\epsilon > 0,\ P(|M_n - \mu| > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$

$$\begin{aligned}
P(|M_n - \mu| > \epsilon) &\leq \frac{V(|M_n - \mu|)}{\epsilon^2} \\
&\leq \frac{V(M_n)}{\epsilon^2} \\
&\leq \frac{V(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k)}{\epsilon^2} \\
&\leq \frac{1}{n^2}\frac{V(\sum_{k=1}^{n} X_k)}{\epsilon^2} \\
&\leq \frac{1}{n^2}\frac{\sum_{k=1}^{n} V(X_k)}{\epsilon^2} \leq \frac{n\sigma^2}{n^2\epsilon^2}
\end{aligned}$$

Vue que X_j et X_i sont independantes $\forall i \neq j$ d'où

$$P(|M_n - \mu| > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

Fonction Generatice:
soit X v.a , $X(\Omega) = \mathbb{N}$

$$G_X(t) = E(t^x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P[X = k]t^X \qquad \text{Fonction Generatice de X}$$

G_X est une serie entiére en t.
$a_k = P[X = k], \qquad 0 < a_k \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow R_{Cv}(\sum a_k z^k) \geq R_{Cv}(\sum z^k) \geq 1$$

$\Rightarrow G_X$ est de rayon de convergance $R_{Cv} \geq 1$
$G_X(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$
$G_X(1)$ converge (aussi $G_X(-1)$ converge)

(P) - X et Y ayant la même fonction Generatice
$\Rightarrow$ X et Y aient même loi de probabilité.
- X admet une espérance $E(X)$ ssi
G_X est derivable en 1 et que la dérivée $G_X^{'}(1) = E(X)$
- X admet une variance $V(X)$ ssi
G_X est deux fois derivable en 1 et on a

$$V(X) = G_X^{''}(1) + G_X^{'}(1) - (G_X^{'}(1))^2$$

$$\begin{aligned}
G_X^{''}(t) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)P(X=k)t^{k-2} \\
\Rightarrow \quad G_X^{''}(1) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k^2 P(X=k)t^{k-2} - \sum_{k=2}^{+\infty} P(X=k)t^{k-2} \\
\Rightarrow \quad G_X^{''}(1) &= E(X^2) - E(X) \\
\Rightarrow \quad V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
&= G_X^{''}(1) + E(X^2) - (E(X))^2 \\
&= G_X^{''}(1) + G_X^{'}(1) - (G_X^{'}(1))^2
\end{aligned}$$

X et Y v.a independantes alors on a

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$$

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)t^k$$

Converge normalement et alors absolument sur $[-1, 1]$ et converege absolument sur $]-R, R[$

$$G_Y(t) = \sum_{q=0}^{+\infty} P(Y = q)t^q$$

Converge normalement et alors absolument sur $[-1, 1]$ et converege absolument sur $]-R, R[$
$\Rightarrow$ la serie produit $\sum W_n t^n$ C.A et on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} W_n t^n &= (\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)t^k)(\sum_{q=0}^{+\infty} P(Y = q)t^q) \\ W_n &= \sum_{k=0}^{n} (P(X = k))(P(Y = n - k)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow W_n &= \sum_{k=0}^{+\infty} P[X = k \text{ et } Y = n - k] \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} P[X + Y = n] \\
\Rightarrow G_X(t)G_Y(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P[X + Y = n]t^n \\
&= G_{X+Y}(t)
\end{aligned}
$$

Fonctions Generatrices des lois usuelles

1) loi de Bernouilli B(p)

$$G_X(t) = 1 - p + pt, \quad R = +\infty$$

2) loi de Binomiale de paramétre B(n,p)

$$G_X(t) = (1 - p + pt)^n, \quad R = +\infty$$

3) loi Geometrique g(p)

$$G_X(t) = \frac{pt}{1 - (1 - p)t} \quad R = \frac{1}{1 - p} > 1$$

4) loi de poisson $P(\lambda)$

$$G_X(t) = e^{\lambda(t-1)} \quad R = +\infty$$

Indications

$$
\begin{aligned}
1)\ G_X(t) &= P(X=0)t^0 + P(X=1)t^1 \\
&= (1-p) + pt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2)\ G_X(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)t^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} t^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} C_n^k p^k (t.p)^k (1-p)^{n-k} \\
&= (1-p+pt)^n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3)\ G_X(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)t^k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} ((1-p)^{k-1}p)t^k \\
&= pt\sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1}t^{k-1} \\
&= pt\sum_{k=1}^{+\infty} ((1-p)t)^{k-1} \\
&= pt\frac{1}{1-(1-p)t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4)\ G_X(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)t^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!})t^k \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}
\end{aligned}
$$