Probabilités

Mounir Bezzarga

Institut préparatoire aux études d'ingénieurs de Tunis
Diapo 2

Si X et Y deux variables aleatoires independantes alors $\forall A \subset X(\Omega), \forall B \subset Y(\Omega)$ on a :

$$P(X \in A \ et \ Y \in B) = P(X \in A) \times P(X \in A).$$

Expression par n variables aleatoires :

1/ Loi conjointe :

Soit $X_1, ..., X_n$ n variables aleatoires definies sur le meme espace probabilisé

$(X_1, ..., X_n)$ v.a de loi de probabilité analogue au cas $n = 2$.

2/ Indépendance mutuelle :

$X_1, ..., X_n$ sont dites mutuellement independantes si et seulement si $\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ on a

$$P(\cap_{i=1}^{n} (X_i = x_i)) = \Pi_{i=1}^{n} P(X = x_i).$$

Lois usuelles :

(i) Loi géométrique : Il s'agit des hypotheses d'une loi binomiale (repetitions + Independances d'une même epreuve de Bernouilli).

X v.a qui designe le temps d'attente de l'evenement A, c-à-d le rang de la premiere realisation de A.

Loi de probabilité de X :

$P(X = k) = q^{k-1}.p, k \in [1, ..., n]$, où $p = P(A)$ et $q = 1 - p$, $p \in]0, 1[$.

Esperance mathematique et variance de X.

(i) $E(X) = \frac{1}{p}; X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$\longleftrightarrow$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k.P(X = k)$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}.$$

On rappelle que $\sum x^k$ serie entiere de rayon de convergence $R = 1$.

$$\Rightarrow (\sum_{k=1}^{+\infty} x^k)' = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}; \forall x \in]-1, 1[$$
$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}.$$
$$\underset{(x=q)}{\Rightarrow} E(X) = p.\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} \Rightarrow E(X) = \frac{1}{p}.$$

(ii) $V(X) = \dfrac{q}{p^2}$.

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 p[X = k] - \frac{1}{p^2} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 q^{k-1} p - \frac{1}{p^2} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1) q^{k-1} p + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1} p}_{=\frac{1}{p}} - \frac{1}{p^2}
\end{aligned}$$

Or

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}; |x| < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}; |x| < 1.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)q^{k-1} = q\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2}$$

$$= \frac{2q}{(1-q)^3}.$$

$$
\begin{aligned}
V(X) &= \frac{2pq}{(1-q)^3} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \\
&= \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \\
&= \frac{q}{p^2} + \frac{q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \\
&= \frac{q}{p^2} + \frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \\
&= \frac{q}{p^2}.
\end{aligned}
$$

Loi sans mémoire :

La loi geometrique est l'unique loi discrete dont le procesus modelisé est sans memoire, c-à-d $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P(X > m + n | X > m) = P(X > n).$$

Loi de Poisson :

La loi de Poisson est utilisée pour modeliser le nombre d'apparition d'un évenement rare.

Par exemple : Dans la désintegration atomique

$*$ Loi de Probabilité associée :

X suit la loi de Poisson de parametre $\lambda > 0$ noté $P(\lambda)$ si

$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ et \\ \forall k \in \mathbb{N}; P(X = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}. \end{cases}$$

Dans ce cas

$$E(X) = \lambda = V(X).$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k.P[X = k] \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda. \\
&\Rightarrow E(X) = \lambda.
\end{aligned}$$

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = E(X^2) - \lambda^2.$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2.P[X=k] \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E(X^2) = \lambda e^{-\lambda}\Big[\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\Big] + \lambda e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{=e^{\lambda}}$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\Big[\lambda\underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}}_{e^{\lambda}} + e^{\lambda}\Big] = \lambda^2 + \lambda.$$

$$\Rightarrow V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Approxiation d'une loi Binomiale par une loi de Poisson :

$(X_n)_n$ suite de v.a discretes , $\forall n \in \mathbb{N}^*.X_n$ suit une loi de Bernouilli $B(n, P_n)$ avec $lim_n np_n = \lambda$ $(\lambda > 0)$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} P[X_n = k] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

$\longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} P[X_n = k] =& C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\ & \underset{n\to+\infty}{\sim} C_n^k (\frac{\lambda}{n})^k (1-(\frac{\lambda}{n}))^{n-k} \\ & (1-(\frac{\lambda}{n}))^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda} \\ & (1-(\frac{\lambda}{n}))^{-k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P[X_n = k] \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} e^{-\lambda}$$

$$\Rightarrow P[X_n = k] \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{n.(n-1)...(n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\underset{(+\infty)}{\sim} \frac{n^k}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} P[X_n = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\Rightarrow P[X_n = k] \underset{(n \to +\infty)}{\sim} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Esperance :

X v.a discrete a valeurs dans un ensemble denombrable $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. On dit que X est d'esperance finie si la serie $\sum x_n P[X = x_n]$ est "absolument convergente".

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P[X = x_n] : \ \textit{esperance de } X.$$

Propriétés :

X et Y v.a sur le meme espace probabilisé et a et $b \in \mathbb{R}$ $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$. Si de plus $X \leq Y$ alors $E(X) \leq E(Y)$. En particulier

$$\textit{Si } X \geq 0, \ \textit{alors } E(X) \geq 0.$$

Variance et covariance :

Si la variable aleatoire X^2 est d'esperance finie, on appelle variance de X le nombre reel
$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E((X - E(X))^2)$.
$\longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X - E(X))^2) \\ &= E(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2) \\ &= E(X^2) - 2(E(X))^2 + (E(X))^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2. \end{aligned}$$

L'ecart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = (V(X))^{\frac{1}{2}}.$$

$a, b \in \mathbb{R}, E(aX + b) = aE(X) + b$.
$\Rightarrow V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Si $V(X) \neq 0$ et si $Y = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$, alors $E(Y) = 0$ et $V(Y) = 1$.
Y est appellée centré reduite de X.

Moment d'ordre k

$$m_k = E(X^k) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^k P[X = x_n].$$

Moment centré d'ordre k

$$\mu_k = E((X - E(X))^k); si\ k = 2\ alors\ \mu_2 = V(X).$$

Soient X et Y deus v.a admettant chaqu'une un moment d'ordre 2. Alors la v.a X.Y admet un moment d'ordre 1 (posséde une esperance finie) de plus,
$|E(X.Y)|^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$ (Inégalité de Cauchy Schwartz).

En faite $< X/Y >= E(XY)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}_2 = \{X$ v.a ayant un moment d'ordre 2 $\}$ (i.e $E(X^2) < +\infty)$

$$< X/X >= E(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 P[X = x_n] = 0 \Rightarrow x_n^2 = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

(sans perte de généralite on suppose que $P[X = x_n] > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$)

$$\Rightarrow X(\Omega) = \{0\}; X \equiv 0$$

$$< X/X >= \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 P[X = x_n] \geq 0$$

$< ./. >$ est bilinéaire par linéarité de E (X) et est aussi symétrique

ainsi on satisfait l'inegalité de Cauchy Schwartz suivante

$$|E(XY)| = | < X/Y > | \leq (E(X^2))^{\frac{1}{2}}.(E(Y^2))^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow (E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2).$$